clase geometría ome :)

Lorenzo Tagua y Pablo Puerto

Noviembre 2022

0. **(OME Nacional 2021 p1)** Los vértices, A, B y C, de un triángulo equilátero de lado 1 están en la superficie de una esfera de radio 1 y centro O. Sea D la proyección ortogonal de A sobre el plano, α, determinado por B, C y O. Llamamos N a uno de los cortes con la esfera de la recta perpendicular a α por O. Halla la medida del ángulo $\angle DNO$.
(Nota: la proyección ortogonal de A sobre el plano α es el punto de corte con α de la recta que pasa por A y es perpendicular a α.)

1. **(OME Local 2015 p2)** El triángulo ABC es isósceles en C, y sea W su circunferencia circunscrita. Sea M el punto medio del arco BC de W que no contiene a A, y sea N el punto donde la paralela a AB por M vuelve a cortar a W. Se sabe que AN es paralela a BC. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos de ABC?

2. **(OME Local 2018 p3)** Sea AD la mediana de un triángulo ABC tal que $\angle ADB = 45°$ y $\angle ACB = 30°$. Determinar el valor de $\angle BAD$.

3. **(OME Local 2021 p3)** En el triángulo ABC con lado mayor BC, las bisectrices se cortan en I. Las rectas AI, BI, CI cortan a BC, CA, AB en los puntos D, E, F, respectivamente. Se consideran puntos G y H en los segmentos BD y CD, respectivamente, tales que $\angle GID = \angle ABC$ y $\angle HID = \angle ACB$. Probar que $\angle BHE = \angle CGF$.

4. **(OME Local 2021 p2)** $ABCD$ es un cuadrilátero convexo verificando $AB > BC$, $CD = DA$ y $\angle ABD = \angle DBC$. Sea E el punto de la recta AB tal que $\angle DEB = 90°$. Probar que $AE = \frac{AB-BC}{2}$.

5. **(Lema conocido)** Sea H el ortocentro del triángulo ABC. Sea X la reflexión de H sobre BC y sea Y la reflexión de H sobre el punto medio de BC. Demuestra que tanto X como Y están sobre la circunferencia circumscrita de ABC y que además AY es su diámetro.

6. **(OMA 2020 p3)** Dado un triángulo OMA, en los lados OM y OA se construyen cuadrados (en el exterior del triángulo) $OXYM$ y $OAUV$, respectivamente.
   (a) Prueba que el segmento XV mide el doble de la mediana trazada desde el vértice O.
   (b) Prueba que la mediana del triángulo OMA es perpendicular al segmento XV.

7. **(OME Nacional 2003 p3)** Las alturas del triángulo ABC se cortan en el punto H. Se sabe que $AB = CH$. Determinar el valor del $\angle BCA$

8. **(OMA 2019 p3)** Sea ABC un triángulo acutángulo, D, E, F los pies de las alturas de A, B y C respectivamente. Sean:

   - O el punto medio del segmento AD,
   - c la circunferencia de centro O que pasa por A y D,
   - X e Y las intersecciones de c con AB y AC, respectivamente.
   - P la intersección de XY con AD, y Q la intersección de AD y EF.

   Prueba que P es el punto medio del segmento QD.

9. **(OME Local 2014 p3)** Sea ABC un triángulo y D, E y F tres puntos cualesquiera sobre los lados AB, BC y CA respectivamente. Llamemos P al punto medio de AE, Q al punto medio de BF y R al punto medio de CD. Probar que el área del triángulo PQR es la cuarta parte del área del triángulo DEF.

10. **(OME Local 2020 p2)** Sea ABC un triángulo con $AB < AC$ y sea I su incentro. El incírculo es tangente al lado BC en el punto D. Sea E el único punto que satisface que D es el punto medio del segmento BE. La línea perpendicular a BC que pasa por E corta a CI en el punto P. Demostrar que BP es perpendicular a AD.

11. **(OME Local 2016 p3)** Sea ABC un triángulo rectángulo en C no isósceles con catetos $b > a$.

    (a) Hallar el lado del cuadrado $AXYZ$ que circunscribe al triángulo ABC (los vértices B y C tienen que estar en lados distintos del cuadrado).

    (b) Explicar paso a paso cómo construir el cuadrado $AXYZ$ con regla y compás.

12. **(OME Local 2017 p1)** Sea E una elipse y consideremos tres rectas paralelas r_1, r_2 y r_3, cada una de las cuales corta a E en dos puntos distintos. Sean estos puntos A_1, B_1, A_2, B_2 y A_3, B_3 respectivamente. Probar que los puntos medios de los segmentos A_1B_1, A_2B_2 y A_3B_3 están alineados.

13. **(OME Nacional 2022 p4)** Sea P un punto en el plano. Demuestra que es posible trazar tres semirrectas con origen en P con la siguiente propiedad: para toda circunferencia de radio r que contiene a P en su interior, si P_1, P_2 y P_3 son los puntos de cortede las semirrectas con la circunferencia, entonces $|PP_1| + |PP_2| + |PP_3| \leq 3r$

14. **(OME Local 2018 p4)** Probar que:

    (a) La suma de las distancias desde un punto de la superficie de la esfera inscrita en un cubo de R^3 a todas las caras del mismo no depende del punto elegido.

    (b) Misma cuestión anterior para la suma de los cuadrados de las distancias.

    (c) Misma cuestión que las anteriores para la suma de los cubos de las distancias.

15. **(Canadá 2000 p4)** Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que $\angle CBD = 2\angle ADB$, $\angle ABD = 2\angle CDB$ y $AB = CB$. Demuestra que $AD = CD$.

16. **(extra chungo)** Sea ABC un triángulo rectángulo en C. Las bisectrices de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ cortan a BC y AC en D y E respectivamente. Sean L, M y N los puntos medios de AD, AB y BE respectivamente. Sea X la intersección de LM y BE; Y la intersección de MN y AD; y Z la intersección de NL y DE. Demuestra que X, Y y Z están alineados.

recursos:

- la biblia de la geometría de olimpiadas:
  Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads, de Evan Chen
- problemas de OMEs de otros años (es lo poco que hay en castellano):
  http://www.olimpiadamatematica.es/
- AoPS, muchísimos problemas de otros países solucionados por la comunidad:
  https://artofproblemsolving.com/community/c13_contests

canales de youtube de olimpiadas (todos en inglés):

- Shefs of Problem Solving
- MindYourDecisions (tiene problemas fáciles y difíciles)
- vEnhance (el mismo Evan Chen, hace streamings en twitch resolviendo problemas)
- 3Blue1Brown (no es de olimpiadas pero tiene algunos vídeos con problemas de IMO y es muy buen canal)
- Numberphile (lo mismo que el anterior)

nuestros correos (podéis preguntarnos dudas sobre cualquier cosa de olimpiadas):

- lorenzotagua.2@gmail.com
- pablopuertomu@gmail.com